

ZADANIA MATURALNE – TRYGNOMETRIA - poziom podstawowy

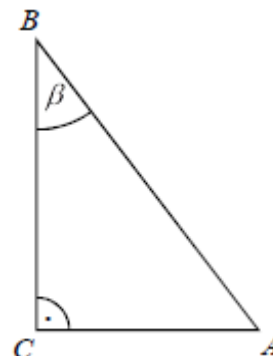
Opracowała – mgr Danuta Brzezińska

Zad. 1. (1 pkt)Jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2-\cos \alpha}{2+\cos \alpha}$ równa się

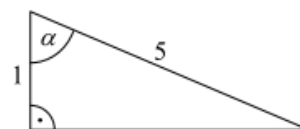
- A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{84}{25}$

Zad. 2. (1 pkt)Dane są długości boków $|BC| = 5$ i $|AC| = 3$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β (zobacz rysunek). Wtedy

- A. $\sin \beta = \frac{3}{5}$ B. $\sin \beta = \frac{4}{5}$
C. $\sin \beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ D. $\sin \beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

**Zad. 3. (1 pkt)**W trójkącie, przedstawionym na rysunku obok, sinus kąta ostrego α jest równy

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

**Zad. 4. (1 pkt)**Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas

- A. $\cos \alpha < \frac{3}{4}$ B. $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$ D. $\cos \alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$

Zad. 5. (1 pkt)Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = 0,9$. Wówczas

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha > 45^\circ$

Zad. 6. (1 pkt)Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Wówczas

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha > 45^\circ$

Zad. 7. (1 pkt)Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α ?

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\alpha > 60^\circ$

Zad. 8. (1 pkt)Liczba $\sin 150^\circ$ jest równa liczbie

- A. $\cos 60^\circ$ B. $\cos 120^\circ$ C. $\operatorname{tg} 120^\circ$ A. $\operatorname{tg} 60^\circ$

Zad.9. (2 pkt)Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Zad. 10. (2 pkt)

Sprawdź prawdziwość równości: $1 - \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ gdy α oznacza miarę kąta ostrego.

Zad. 11. (2 pkt)

Sprawdź, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest tożsamość: $1 - \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Zad. 12. (2 pkt)

Sprawdź, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest tożsamość:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2.$$

Zad.13. (2pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Zad.14. (2pkt)

Kąt α jest ostry i $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Zad.15 . (2pkt)

Wykaż, że jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{6}{5}$, to $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,22$.

Zad. 16. (2pkt)

Wykaż, że jeżeli α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $\cos \alpha$ jest liczbą niewymierną.

Zad. 17. (2pkt)

Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Zad. 18. (2pkt)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Zad. 19. (2pkt)

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{3 \cos \alpha + 5 \sin \alpha}$.

Zad. 20. (2pkt)

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Zad. 21. (2pkt)

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$.

Zad. 22. (2 pkt)

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 12, a cosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

Zad. 23. (2 pkt)

Udowodnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$.

Zad. 24. (2pkt)

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α . Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Zad. 25. (2pkt)

W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10\text{cm}$, wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa 5 cm . Oblicz miary kątów tego trójkąta. Odpowiedź podaj w stopniach.

Zad. 26. (2pkt)

W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.

ZADANIA MATURALNE – TRYGONOMETRIA - POZIOM ROZSZERZONY*Opracowała – mgr Danuta Brzezińska***Zad. 1. (1 pkt)**

Każda liczba x należąca do przedziału otwartego $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ spełnia nierówność

- A. $\operatorname{tg} x > \sin x$ B. $\cos x > \sin x$
C. $\cos x > \operatorname{tg} x$ D. $\operatorname{tg} x > \cos x$

Zad.2. (2 pkt)

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = -2$ i $\alpha \in (0; \pi)$ oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Zad. 3. (2 pkt)

Wiedząc, że $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, $\sin \alpha < 0$ oraz $4\operatorname{tg} \alpha = 3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$

- a) oblicz $\operatorname{tg} \alpha$,
b) Zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

Zad. 4. (4 pkt)

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

Zad. 5. (6 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- a) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.
b) Wyznacz największą wartość funkcji f .

Zad. 6. (3 pkt)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

- a) Naszkicuj wykres funkcji f .
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

Zad. 7. (4pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = 2\sin^2 x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Narysuj wykres funkcji f .
b) Rozwiąż równanie $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Zad.8 . (4 pkt)

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Naszkicuj wykres funkcji f .
b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.

Zad.9. (4 pkt)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right). \text{ Odpowiedź uzasadnij.}$$

Zad. 10.

Dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ rozwiąż równanie $\sin 3x = 1$.

Zad. 11. (5 pkt)

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Zad. 12. (4 pkt)

Rozwiąż równanie: $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

Zad.13. (6 pkt)

Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $\sin 3x = \operatorname{ctg} \frac{25}{2}\pi$, które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \leq 5\pi$.

Zad. 14.

Dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ rozwiąż równanie $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

Zad. 15. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 16. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 17. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 18. (6pkt)

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x (2\sin x \cos x + \cos x) = 0$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$.

Zad. 19. (4 pkt)

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozwiąż równanie $\sin^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^2 x = 0$.

Zad. 20. (5 pkt)

Określ, jaką liczbą – dodatnią czy ujemną, jest $\sin x + \cos x$, wiedząc, że $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ i $(1 + \sin x)\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) + \frac{1}{3} = 0$.

Zad.21.

Wykaż, że równanie $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zad. 22. (6 pkt)

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

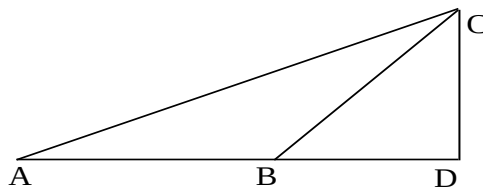
a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zad. 23. (5 pkt)

Na poniższym rysunku przedstawiono równoramienny trójkąt ABC (o podstawie AC) oraz

prostokątny równoramienny trójkąt BDC. Uzasadnij, że $\cos(\angle ACD) < \frac{1}{2}$



Zad. 24. (3 pkt)

Liczby α i β są miarami kątów ostrych w trójkącie prostokątnym. Wykaż, że $\cos \alpha + \cos \beta > 1$.

Zad. 25. (PR – 5 pkt)

Latarnia morska jest w punkcie P. Statek zbliża się do brzegu. Kapitan obserwuje latarnię morską z punktu A i widzi ją pod kątem α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{10}$. Po przeplłynięciu 500 m w kierunku latarni

kapitan widzi ją z punktu B pod kątem β takim, że $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{8}$. Oblicz odległość punktu B od punktu P przy założeniu, że punkty A, B i P należą do jednej prostej.

Zad. 26.

Rozwiąż równanie

a) $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$.

b) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 27. (3 pkt)

Kąt α jest taki, że $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$

Zad. 28. (4 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru p ($p \in \mathbb{R}$), dla których równanie $3 \cos^2 x = (p + 1) \cdot \cos x$ ma w przedziale $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ tylko trzy różne rozwiązania, z których dwa są ujemne, a jedno dodatnie.

Zad. 29. (4 pkt)

a) Wyznacz wszystkie wartości x , gdzie $x \in \langle 0, 4\pi \rangle$, dla których liczby: $-\sin x$, $\cos^2 x + 1$, $8 \sin x$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego.

b) Oblicz sumę 101 początkowych wyrazów tego ciągu.

Zad. 30. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2 \operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 31. (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest równość $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$.

Zad. 32. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 33. (5 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin x \cdot |\cos x| = 0,25$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 34. (1 pkt)

Dla dowolnego kąta α wartość wyrażenia $\sin \alpha + \sin(180^\circ - \alpha)$ jest równa wartości wyrażenia

- A. $\sin 2\alpha$ B. $-\sin \alpha$ C. $2 \sin \alpha$ D. 0

Zad. 35. (1 pkt)

Dla każdego kąta α wartość wyrażenia $\cos 2\alpha + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 0

Zad. 36. (2 pkt)

Wyznacz największą liczbę będącą rozwiązaniem równania $4 \cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$, należącą do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.

Zad. 37. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $\cos 5x > \frac{1}{2}$ dla $-\pi \leq x \leq \pi$.

Zad. 38. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $\sin 3x < -\frac{1}{2}$ dla $\pi \leq x \leq 2\pi$.

Zad. 39. (3 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin 4x - \cos 5x = 0$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zad. 40. (3 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin 3x + \sin 9x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zad. 41. (4 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

Zad. 42. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $(4 \sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$ dla $x \in (-\pi, 0)$.

Zad. 43. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 44. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zad. 45. (4 pkt)

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$, to $\cos \gamma < 0$.

Zad. 46. (4 pkt)

Wykaż, że $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 1$.

Zad. 47. (5 pkt)

a) Sprawdź, czy równość

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

Jest tożsamością trygonometryczną.

b) Udowodnij, że jeśli α i β są dwoma kątami trójkąta i $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, to trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym lub równoramiennym.

Zad. 48. (3 pkt)

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$.