

TEMAT: ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

Za pomocą danych statystycznych możemy opisywać zarówno działalność człowieka, jak i zjawiska zachodzące w przyrodzie.

Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli w sześciu kolejnych meczach dwaj zawodnicy A i B , grający w szkolnej drużynie koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A :

$$\frac{8 + 18 + 10 + 20 + 16 + 12}{6} = 14$$

a przez zawodnika B :

$$\frac{24 + 18 + 4 + 0 + 0 + 2}{6} = 8$$

Średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zwróć uwagę, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	

Ćwiczenie 2

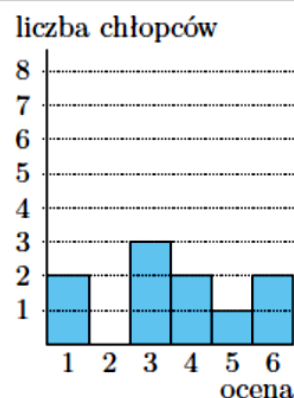
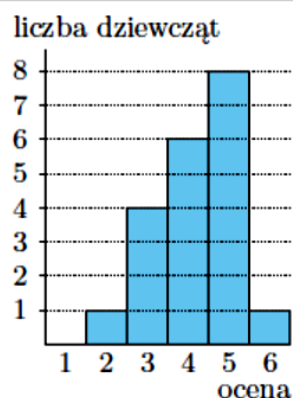
Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych: A , B i C . Sformułuj wniosek.

$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}$, $B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}$, $C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:



Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:

$$\bar{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4,2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\bar{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3,6$$

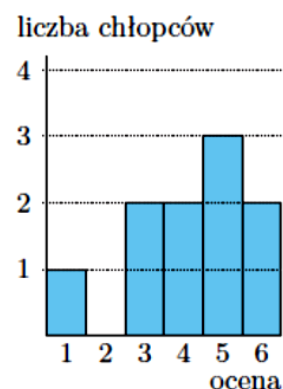
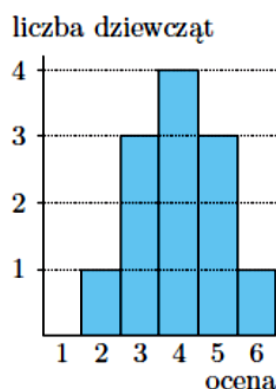
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\bar{x}_k = \frac{20 \cdot \bar{x}_d + 10 \cdot \bar{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę, że $\bar{x}_k$ nie jest równe $\frac{\bar{x}_d + \bar{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 3

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.

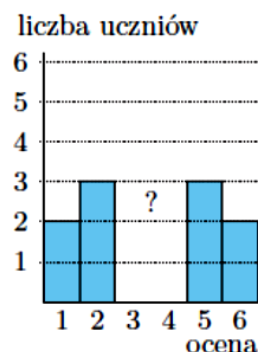


Ćwiczenie 4

- a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \dots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1 .
- b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7 .

ZADANIA

1. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?



2. Liczbę poszczególnych ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie przedstawiono na diagramie obok. Jak należy uzupełnić ten diagram, aby średnia ocen z geografii w tej klasie wynosiła:
- a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65?
3. W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł. Jakie będzie średnie wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni:
- a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł,
b) trzech stażystów z wynagrodzeniem miesięcznym 2300 zł każdy?
4. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:
- a) o 2% wyższe niż poprzednio, b) o 1% niższe niż poprzednio?

6. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).
- a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127 b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82
7. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \dots, 2^{12}$ oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.

Mediana i dominanta

Niektóre dane lepiej od średniej arytmetycznej charakteryzuje wartość środkowa – **mediana**. W celu jej wyznaczenia porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, **2**, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

–3, 0, 0, 2, **7**, 9, 11, 13, 17 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, **3**, **8**, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5,5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę danych liczb.

a) 1, 2, 3, 100, 1000

c) 7, 7, 8, 11, 20, 7

b) 6, 7, 8, 105, 1005

d) 20, 8, 7, 11, 7, 7

Ćwiczenie 2

W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

ogierzy: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;

klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi ogierów i klaczy oraz wszystkich koni w stadninie.

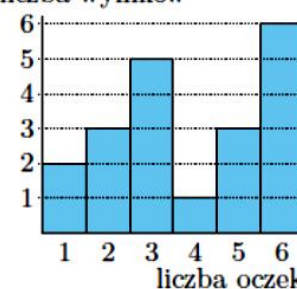


Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek.

Wyznacz medianę uzyskanych wyników.

liczba wyników



Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

a) większa od ich średniej arytmetycznej,

b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

ZADANIA

1. W tabeli przedstawiono, ile medali zdobyli Polacy w trakcie letnich Igrzysk Olimpijskich w latach 1992–2012.

Oblicz średnią i medianę zdobytych:

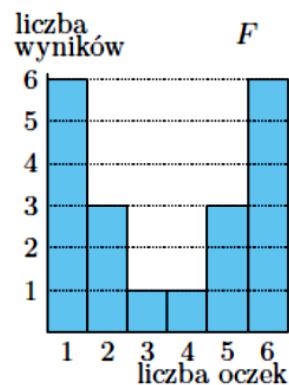
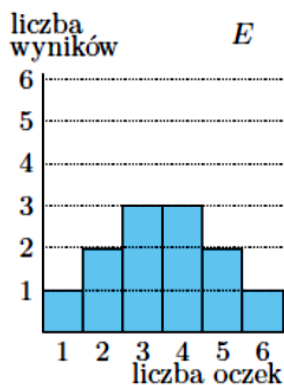
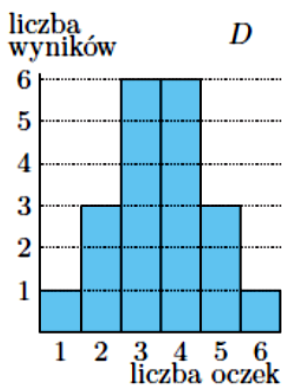
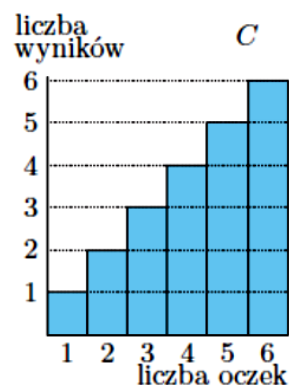
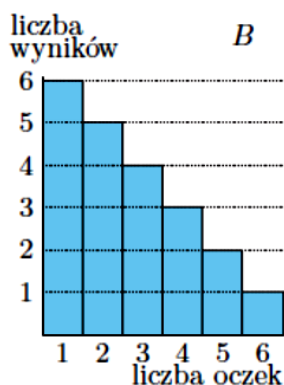
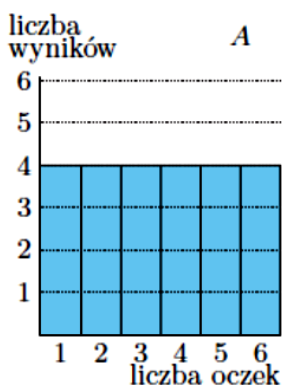
- a) złotych medali w tych latach,
b) wszystkich medali w tych latach.

Rok	złoto	srebro	brąz
1992	3	6	10
1996	7	5	5
2000	6	5	3
2004	3	2	5
2008	3	6	1
2012	2	2	6

2. Oznaczmy przez: $\bar{x}$, M i D odpowiednio: średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c , 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c , jeśli:

- a) $\bar{x} = D$, b) $\bar{x} = M$.

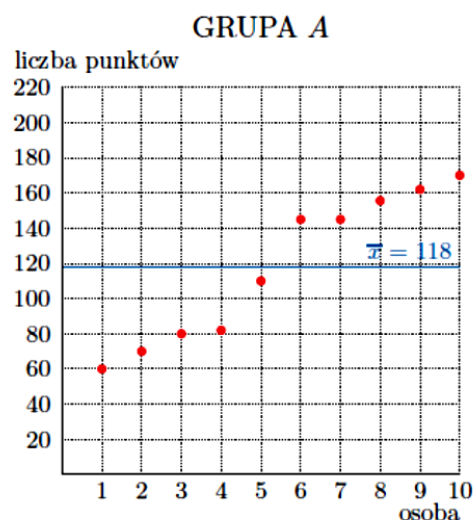
3. Osoby: A , B , C , D , E , F wykonały serie rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Każda osoba sporządziła listę otrzymanych przez siebie wyników. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną danych z każdej z list.



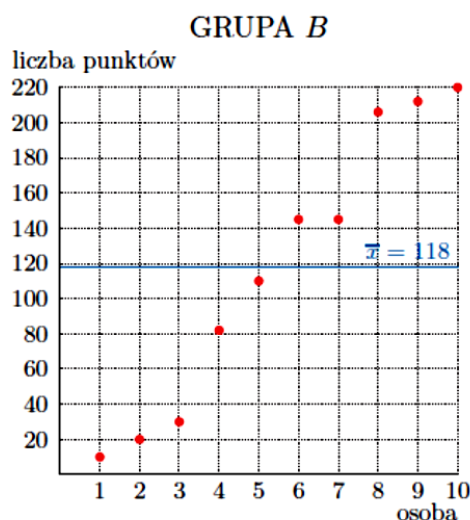
Odchylenie standardowe

Przykład 1

W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Dla obydwu zestawów danych średnia arytmetyczna jest równa 118, mediana – 127,5, a dominanta – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

$$\bar{x} = \frac{4 + 9 + 11 + 13 + 13}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2 + (9-10)^2 + (11-10)^2 + (13-10)^2 + (13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11,2$$

Stąd odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11,2} \approx 3,35$.

Ćwiczenie 1

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 4, 5, 6, 7, 8;

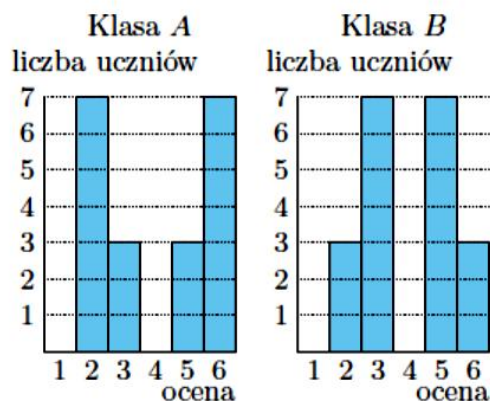
b) 3, 6, 6, 6, 9;

c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.

Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:



$$\sigma_A^2 = \frac{7 \cdot (2-4)^2 + 3 \cdot (3-4)^2 + 3 \cdot (5-4)^2 + 7 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3,1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3,1} \approx 1,76$.

Obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (3-4)^2 + 7 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1,9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1,9} \approx 1,38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B, odchylenie standardowe jest większe:

A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5;

B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Ćwiczenie 3

Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B. Sformułuj wniosek.

A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4;

B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14.

Przykład 4

Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe otrzymanych danych.

Średnia waga zawodników wynosi:

$$\bar{x} = \frac{170 + 190 + 160 + 170 + 180 + 150}{6} = 170 \text{ [kg]}$$

Aby łatwiej było obliczyć odchylenie standardowe, sporządzamy tabelę.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	170	0	0
2	190	20	400
3	160	-10	100
4	170	0	0
5	180	10	100
6	150	-20	400
Suma			1000



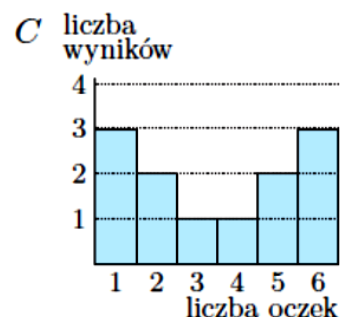
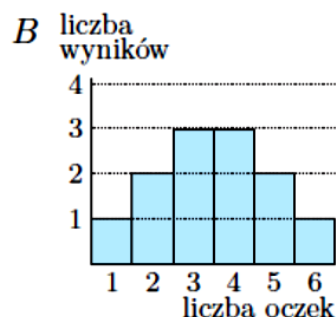
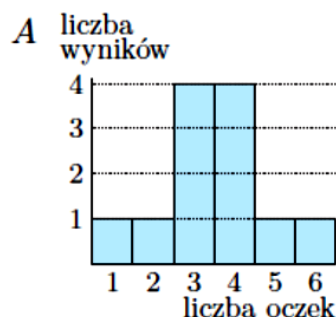
Wariancja $\sigma^2 = \frac{1000}{6} \approx 166,7 \text{ [kg}^2\text{]}$, a odchylenie standardowe $\sigma \approx 12,9 \text{ kg}$.

Ćwiczenie 6

W szkolnych zawodach gimnastyki artystycznej wzięło udział ośmiu uczestników, których wagi (w kilogramach) są równe: 46, 42, 50, 46, 54, 58, 60, 44. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe tych danych.

ZADANIA

- Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:
 - 5, 5, 5, 5, 5, 5;
 - 4, 4, 4, 6, 6, 6;
 - 3, 3, 3, 7, 7, 7;
 - 3, 4, 5, 5, 6, 7;
 - 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9;
 - 4, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 10.
- Każda z osób: A , B , C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Dla każdego zestawu danych oblicz odchylenie standardowe.



- W pewnej firmie badano staż pracy pracowników – dane zestawiono w tabeli. Oblicz średni staż pracy pracowników tej firmy oraz wariancję i odchylenie standardowe.

Staż pracy w latach	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba pracowników	6	5	3	2	4	2	3	2	0	1

Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3 + 1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1 + x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Marek	6	2	$\frac{3 \cdot 6 + 2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3 \cdot 3 + 5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \dots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

- a) $n_1 = 3, n_2 = 1$ b) $n_1 = 1, n_2 = 1$ c) $n_1 = 0,5, n_2 = 0,5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12
Waga	2	1	3

b)

Liczba	7	3	4
Waga	0,2	0,3	0,5

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9.

Liczba: x_i	2	7	9
Waga: n_i (liczba wystąpień)	12	5	3

Dane z tabeli podstawiamy do wzoru:

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4,3$$

Zauważ, że tak obliczona średnia ważona wyjściowego zestawu danych jest ich średnią arytmetyczną.

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie studentów zebrano dane dotyczące wysokości pobieranego stypendium i przedstawiono je w tabeli.

x_i – wysokość stypendium [zł]	0	300	600	800
n_i – liczba studentów	20	10	15	5

- Oblicz średnią wysokość stypendium przypadającą na jednego studenta.
- Studentom, którzy do tej pory nie otrzymywali stypendium, postanowiono wypłacać je w wysokości 250 zł. Ile obecnie wyniesie średnia wysokość stypendium?

ZADANIA

- W teleturnieju, aby móc wygrać wycieczkę do Torunia, trzeba wziąć udział w czterech osobno ocenianych konkurencjach. W tabeli podano, ile punktów zdobył każdy z trzech zawodników, którzy przeszli do finału. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał teleturniej?

	I waga 0,2	II waga 0,8	III waga 0,4	IV waga 0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8



- Dane są liczby: x_1, x_2, x_3 i x_4 . Uzasadnij, że w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

A:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

3. Oblicz t , jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 6,5.

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

4. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:

- prace domowe: 1, 1, 1,
- kartkówki: 3, 1, 2,
- klasówki: 3, 6, 6.

Kategoria	Waga
Praca domowa	1
Kartkówka	2
Klasówka	n

Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa: a) 3, b) 4?

**BARDZO DZIĘKUJĘ ZA TRZYLETNIĄ
WSPÓŁPRACĘ – MATERIAŁ Z MATEMATYKI
ZGODNY Z PODSTAWĄ PROGRAMOWĄ
ZOSTAŁ ZREALIZOWANY!!!!!!!!!!!!!!**

***POZOSTAŁE ZAJĘCIA BĘDĄ PRZEZNACZONE
NA POWTÓRZENIE PODSTAWOWYCH TREŚCI
PROGRAMOWYCH OBOWIĄZUJĘCE NA
EGZAMINIE MATURALNYM***